تحلیل نظری و تجربی پس‌کمانش حرارتی ستون‌ها*

(یادداشت پژوهشی)

حامد باقریان[۱] حمید اختراعی طوسی[۲]

چکیده *بسیاری از سازه‌های مکانیکی در محیط‌هایی با اختلاف دمای زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند. تغییر دما، تنش‌ها و تغییرشکل‌های قابل ملاحظه‌ای ایجاد می‌کند. در مواردی که سازهٔ مکانیکی از عناصر لاغر یا به عبارتی از تیرها تشکیل شده باشد، یکی از مشکلات عمدهٔ ناشی از افزایش دما، وقوع پدیدهٔ کمانش حرارتی خواهد بود. تداوم افزایش دما پس از وقوع کمانش، همچنان تنش و تغییرشکل‌های حاکم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در راستای مطالعهٔ آثار پس از کمانش حرارتی، ضمن معرفی روش تحلیل پس‌کمانش حرارتی براساس نظریهٔ تغییرشکل کوچک تیرها، شیوهٔ تحلیل یک تیر دوسرمفصل هنگام افزایش دمای یکنواخت و در حضور بار عرضی گسترده با استفاده از رویکرد تغییرشکل بزرگ معرفی می‌شود. اعتبار نتایج حاصل از روش تغییرشکل بزرگ توسط مقایسهٔ نتایج با روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک، مدل‌سازی خطی و غیرخطی در محیط نرم‌افزار آباکوس (ABAQUS) و آزمایش تجربی ارزیابی می‌گردد. در این راستا ضمن معرفی ساختار طراحی شده برای انجام آزمایش، نتایج حاصل از مقایسهٔ تحلیل پس‌کمانش طبق نظریهٔ تغییرشکل بزرگ با سایر روش‌های تحلیلی و تجربی ارائه می‌گردد. نمودارهای توزیع تغییرمکان عرضی تیر تحت مقادیر متفاوت بار به‌روش‌های مختلف و نیز نمودارهای تأثیر دما بر تغییرمکان میانهٔ تیر معرفی می‌گردد. پس از جمع‌بندی نتایج در مورد شیوهٔ مناسب تحلیل، اظهار نظر می‌شود.*

واژه‌های کلیدی تغییرشکل بزرگ، پس‌کمانش حرارتی، روش اختلاف تربیعی، نرم‌افزار آباکوس.

Theoretical and Experimental Thermal Post Buckling Analysis of Columns

H. Bagheriyan H. Ekhteraei Toussi

Abstract *Many of the mechanical structures are employed in high temperature conditions. Any variation of temperature may cause considerable side effects such as the creation of thermal stress or deformation. When a structure is composed of slender members such as beams or columns, one of the main problems concerning the rise of temperature is the incidence of thermal buckling. The continuing rise of temperature beyond the onset of thermal buckling level, continually affects the dominant forces and deformations. To study the post buckling phenomenon, following the introduction of different small deformation methods of thermal buckling analysis, a through large deformation scheme is developed to analyze the buckling of a simply supported column. For the case of large deformation analysis the validity of the results is evaluated by comparing with the results obtained by using of the small deformation theory, the linear and nonlinear simulations of ABAQUS software as well as the experimental data. The results characterize the deflection of a beam with uniformly distributed load by different solution techniques as well as the effect of temperature on the mid span deflection of a post buckled beam. Based on the obtained results, the validity of different methods is evaluated.*

Key Words Large Deformation, Post- Thermal Buckling, Differential Quadrature Method, ABAQUS

*تاریخ دریافت مقاله ۹۱/٦/۱٤ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۹/۱۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. ekhteraee@um.ac.ir

مقدمه

اعمال بار حرارتی در برخی از سازه‌ها اجتناب‌ناپذیر و در برخی دیگر تصادفی می‌باشد. برخی از سازه‌ها در طول دورهٔ کاری، به دفعات تحت بارگذاری‌های حرارتی قرار می‌گیرند. تأثیر حرارت بر ساختار و عملکرد سازه‌هایی چون فضاپیماها، راکتورهای هسته‌ای و مبدل‌های حرارتی نمونه‌هایی از این نوع بارگذاری‌های حرارتی می‌باشند. از طرفی ممکن است بار حرارتی به‌طور تصادفی به یک سازه اعمال گردد. از این نمونه نیز می‌توان به آتش‌سوزی در ساختمان‌ها و تأسیسات شهری و صنعتی اشاره کرد. بدون در نظر گرفتن اثرات بار حرارتی، طراحی یک سازه، کامل و ایمن نخواهد بود. یک دسته از اعضای مهم در میان سازه‌ها، تیر-ستون‌ها می‌باشند که در بسیاری از موارد خود بخش بزرگی از تشکیلات یک ساختار مرکب را تشکیل می‌دهند. از مهم‌ترین آثار حرارت در تیر-ستون‌ها، وقوع پدیدهٔ کمانش حرارتی (Thermal buckling) می‌باشد. چنانچه سازه‌ای را که دچار کمانش حرارتی شده است کماکان قابل استفاده تشخیص دهیم، مطالعهٔ رفتار دما- تغییر مکان در دورهٔ پس از کمانش که از آن تعبیر به پس‌کمانش می‌شود، حائز اهمیت است. ریل‌ها، خطوط انتقال نفت یا ترموستات‌های دوفلزی از جمله مواردی هستند که مطالعهٔ آثار پس‌کمانش حرارتی در رفتار مکانیکی آنها دارای اهمیت است.

هنگامی که بارهای اعمالی روی یک عضو، تغییرشکل‌های بزرگ ایجاد نماید، کاربرد روش‌هایی مانند نظریهٔ تغییرشکل کوچک یا روش‌های خطی، مناسب نیست و طراحی براساس این تئوری‌ها، طراحی مناسبی نمی‌باشد. در این حالت لازم است برای طراحی و تحلیل از روش‌هایی چون نظریهٔ تغییرشکل بزرگ ارتجاعی استفاده نمود. برای مطالعهٔ پس‌کمانش حرارتی تیر-ستون‌ها به‌کمک نظریهٔ تغییرشکل بزرگ تیرها آشنایی با سابقهٔ این قبیل مطالعات یک گام نخست محسوب می‌شود. تا آن‌جا که بررسی مؤلفان نشان می‌دهد، تاکنون به‌طور اختصاصی تحقیقی در زمینهٔ کاربرد نظریهٔ تغییرشکل‌های بزرگ برای مطالعهٔ پس‌کمانش حرارتی تیرها منتشر نشده است. بنابراین به‌منظور بررسی تاریخچهٔ این پژوهش به‌طور مجزا پیشینهٔ تحقیق در مسائل کمانش حرارتی و مسائل تغییرشکل بزرگ معرفی می‌شود.

تیرهایی که تحت بار فشاری ناپایدار می‌گردند، به‌عبارت دیگر ستون‌ها برای اولین بار در اوایل قرن ۱۸ توسط اولر مورد مطالعه قرار گرفتند. در سال‌های اخیر توجه زیادی به مطالعهٔ پدیدهٔ کمانش حرارتی جلب شده است. از این نمونه می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. رائو و راجو [1,2] (Rao and Raju) به بررسی کمانش حرارتی صفحه‌ها و ستون‌ها پرداختند. گوس و انتمن [3] (Gauss and Antman) توصیف کلی در مورد ویژگی‌های حالت کمانش حرارتی غیرخطی تیر و صفحات الاستیک ارائه کردند. لی و دیگران [4] (Li *et al.*) پاسخ پس‌کمانش یک تیر الاستیک با دو تکیه‌گاه ساده، تحت افزایش دمای غیریکنواخت را بررسی نمودند. آکباس و کوکاتورک [5] (Kocaturk and Akbas) آنالیز غیرخطی یک تیر با دو تکیه‌گاه ساده، ساخته شده از مواد هایپر الاستیک (hyper elastic) را توسط روش اجزای محدود (Finite element method) انجام دادند. واز و دیگران (Vaz et al.) [6] حل پرتوربیشن (perturbation) رفتار پس‌کمانش اولیهٔ یک تیر نازک با دو انتهای ثابت را ارائه نمودند.

در تحلیل کمانش حرارتی اغلب مطالعهٔ دو کمیت در کانون توجه قرار می‌گیرد. در حالی که اغلب، شناخت بار بحرانی سازه دارای اهمیت است، در برخی موارد نیز میزان تغییرشکل پس‌کمانشی برای طراح اهمیت دارد. از آن‌جا که انتظار می‌رود تغییرشکل‌های پس‌کمانش مقادیر بزرگی داشته باشد، در تحلیل از تئوری تغییرشکل بزرگ (Large Deformation Theory) استفاده خواهد شد. این تئوری اولین بار

به‌طور گسترده توسط هاگز [7] (Hodges) برای تحلیل تغییرشکل رتور کشتی به‌کار گرفته شد. هاگز و هنانت (Hinnant and Hodges) [8] به بررسی و آنالیز نتایج تجربی حاصل از یک تیر تحت تغییرشکل بزرگ پرداختند. بخشی از آزمایشی که توسط آنان ترتیب داده شده بود شامل مطالعهٔ یک تیر یک‌سرگیردار بود که به انتهای آن یک جرم متصل گردیده بود. آنها با احتساب آثار تغییرشکل بزرگ و با استفاده از روش انرژی، شکل دقیق‌تری از تغییرشکل تیر را پیش‌بینی نمودند. مطالعه دیگری با این رویکرد توسط لوئیس و موناسا [9] (Monasa and Lewis) انجام شده است. آن‌ها اثرات غیرخطی را تنها در انحنای تیر در نظر گرفتند و از معادلهٔ (۱) به شرح زیر برای معرفی رابطهٔ میان انحنا و خیز در طول تیر استفاده کردند.

$$\kappa = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۱)$$

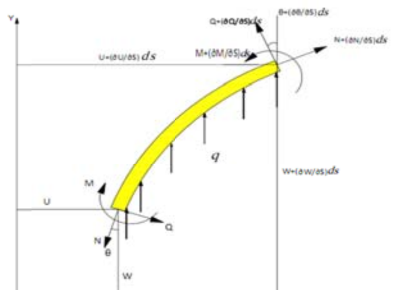
از دیگر مطالعات بر روی تغییرشکل بزرگ تیرها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

ونگ [10] (Wang) به حل تعدادی مسائل تغییرشکل بزرگ تیر الاستیک خطی توسط روش پرتوربیشن پرداخت. لوئیس و موناسا (Lewis and Monasa) [11] مسائل تغییرشکل بزرگ در تیرهای یکسر گیردار الاستیک غیرخطی را به روش عددی حل نمودند. بیونگ و دیگران [12] (Byoung *et al.*) با استفاده از روش رانج-کوتا (Raung-Kutta) به بررسی تغییرشکل بزرگ یک تیر الاستیک خطی با سطح مقطع متغیر پرداختند. بیکر [13] (Baker) منحنی ارتجاعی تغییرشکل بزرگ یک تیر الاستیک خطی با توزیع بار دل‌خواه را با استفاده از معادلات حاکم اولر برنولی یافت. این‌ها مواردی چند از مطالعات انجام شده در زمینهٔ تغییرشکل بزرگ تیرها تحت بار مکانیکی بود که به‌طور نمونه بدان اشاره شد.

در این مقاله ابتدا یکی از نظریه‌های رایج مدل‌سازی تغییرشکل بزرگ تیرها معرفی خواهد شد. سپس برای بررسی صحت و اعتبار این رویکرد، نتایج حاصل از تحلیل یک تیر دوسرگیردار تحت بار یکنواخت عرضی با نتایج حاصل از روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک و تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. روند تحلیل برای هر یک از روش‌های ذکر شده به‌تفصیل بیان می‌گردد. در مرحله بعد روش تغییرشکل بزرگ برای تحلیل تأثیر بارهای حرارتی به‌کار خواهد رفت. برای این منظور یک تیر دوسرمفصل که به‌طور هم‌زمان تحت بار یکنواخت عرضی و افزایش دمای یکنواخت قرار دارد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این مورد نیز نتایج حاصل از روش تغییرشکل بزرگ، شبیه‌سازی رایانه‌ای و روش آزمایش تجربی با یکدیگر مقایسه می‌گردند تا میزان صحت روش تغییرشکل بزرگ در بارگذاری‌های حرارتی معلوم شود.

معادلات حاکم

به‌منظور حفظ انسجام مطالب، در این بخش فرمول‌بندی معادلات حاکم بر تغییرشکل بزرگ تیرها که از مرجع [14] اقتباس گردیده است، معرفی می‌شود. مطابق شکل (۱) یک المان از تیری با تغییرشکل بزرگ به‌صورت یک منحنی به طول ds در نظر گرفته می‌شود. در این تصویر u تغییرمکان تیر در راستای محور x w تغییرمکان تیر در راستای محور y، θ زاویهٔ راستای تیر و محور y پس از تغییرشکل و θ_0 مقدار این زاویه پیش از تغییرشکل می‌باشد.



شکل ۱ المان منحنی شکل با طول ds

شرایط تعادل استاتیک برای این المان، دسته معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial s}(N\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial s}(Q\cos\theta)=0 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(N\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial s}(Q\sin\theta)+q=0 \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s}-Q=0 \qquad (٤)$$

که در آن M گشتاور خمشی، N نیروی محوری، Q نیروی برشی می‌باشد. برای سهولت نسبت کشیدگی R به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R=\frac{N}{EA}+1 \qquad (٥)$$

لذا با توجه به هندسهٔ تغییرشکل داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial s}=R\cos\theta \qquad (٦)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=R\sin\theta \qquad (٧)$$

هم‌چنین با چشم‌پوشی از آثار نیروی برشی، رابطهٔ گشتاور M و زاویهٔ راستای تیر با محور قائم یعنی زاویهٔ θ به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$M=EI\frac{d\theta}{ds} \qquad Q=EI\frac{d^2\theta}{ds^2} \qquad (٨)$$

از مقایسهٔ روابط (٧ و ٦)،یک معادلهٔ حاکمه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{du}{ds}=\frac{dw}{ds}\tan\theta \qquad (٩)$$

از ادغام روابط (٨ و ٤)، مقدار Q برحسب θ و از ادغام روابط (٥) با روابط (٧ و ٦) مقدار N به‌دست می‌آید. از قرار دادن این مقادیر در روابط (٣ و ٢)، دو معادلهٔ حاکمهٔ دیگر به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\eta\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}-\sin\theta\right)-\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\cos\theta\right)=0 \qquad (١٠)$$

$$\eta\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}-\cos\theta\right)-\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\sin\theta\right)+q=0 \qquad (١١)$$

که $\eta=\frac{AL^2}{EI}$ می‌باشد. در این روابط A سطح مقطع تیر، L طول تیر و I گشتاور دوم سطح مقطع است. حل هم‌زمان معادلات حاکمه (١١-٩) با در نظر گرفتن شرایط مرزی موجود، منجر به یافتن u، w و θ در نقاط مختلف تیر می‌شود. معادلهٔ حاصل غیرخطی و غیرهمگن است. برای پاسخ‌یابی این معادله باید از روش‌های عددی کمک گرفت. یک روش موثر و دارای میزان دقت بالا، روش موسوم به اختلاف تربیعی یا (Diffrentional Quadrature Method: DQM) [5] است. این روش در بخش بعد به اجمال معرفی می‌شود.

روش اختلاف تربیعی

روش اختلاف تربیعی یک روش برای مجزاسازی و حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در این روش، مشتق تابع نسبت به یک متغیر توسط ترکیبی از مقادیر تابع در تعدادی نقطهٔ خاص جایگزین می‌گردد. اگر n تعداد نقاط ویژه در دامنهٔ مورد بررسی باشد، طبق قانون اختلاف تربیعی، مشتق مرتبهٔ N یک تابع دل‌خواه مانند f(x) در نقطهٔ $x=x_i$ به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود [15]:

$$\frac{d^N f(x_i)}{dx^N}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^{(N)}f(x_k) \qquad i=1,\ldots,n \qquad (١٢)$$

در معادلهٔ فوق، در محدودهٔ مورد بررسی مقادیر A_{ik} یعنی ضرایب وزن، به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$A_{ij}^{1}=\frac{\Pi(x_i)}{(x_i-x_j)\,\Pi(x_i)} \qquad i, j=1, 2, \ldots, n \text{ and } i\neq j \qquad (١٣)$$

$$A_{ij}^{(k)}=k\left[A_{ii}^{(k-1)}A_{ij}^{(1)}-\frac{A_{ij}^{(k-1)}}{x_i-x_j}\right] \qquad 2\leq k\leq n-1 \qquad (١٤)$$

$$A_{ii}^{(m)}=-\sum_{\substack{j=1\\ i\neq i}}^{n}A_{ij}^{(m)} \qquad m=1,\ldots,n-1 \qquad (١٥)$$

که $\prod(x_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)$ می‌باشد. در شکل ماتریسی می‌توان رابطهٔ بازگشتی زیر را برای تعیین توابع وزن استفاده نمود.

$$[A^{(r)}]=[A^{(1)}][A^{(r-1)}] = [A^{(r-1)}][A^{(1)}] \qquad (۱۶)$$

نقاط ویژه‌ای که در روابط (۱۳ و ۱۲) با متغیر اندیسی x_i مشخص شده‌اند همان ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف- لوباتو (Chebychev- Lobatto) می‌باشند که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند.

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)L\right] \qquad (۱۷)$$

$$i=2,\dots, n-1 \qquad x_1=0 \qquad x_n=L$$

با جایگزین نمودن مشتقات به روش اختلاف تربیعی، معادلات (۱۱-۹) به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\, U_k \;= \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)} W_k\right) \tan\theta_i \qquad (۱۸)$$

$$\eta\left[\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(1)}\, U_j - sin\theta_k\right) - \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(2)}\;\theta_j\right) cos\theta_k\right]=0 \qquad (۱۹)$$

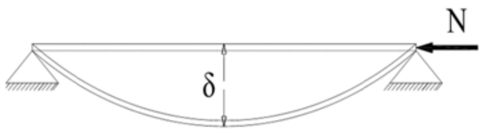
$$\eta\left[\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(1)}\, W_j - cos\theta_k\right) + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(1)}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}^{(2)}\;\theta_j\right) sin\theta_k\right] +q=0 \qquad (۲۰)$$

که در آن، $i=2,\dots,n-1$ می‌باشد. اکنون با فرض آن‌که حل عددی معادلات به روش DQM بسط داده شود روند تحلیل کمانش حرارتی در تیرهای تحت افزایش دمای یکنواخت توسط تئوری تغییرشکل کوچک و تئوری تغیر شکل بزرگ معرفی می‌شود.

مدل‌سازی پدیدهٔ کمانش حرارتی

در این بخش با دو رویکرد متفاوت تغییرشکل کوچک و بزرگ مسألهٔ کمانش حرارتی تیر- ستون‌ها بررسی می‌شود.

مطالعه با دیدگاه تغییرشکل کوچک. برای مطالعه از دیدگاه تغییرشکل کوچک مطابق شکل (۲) فرض می‌شود تیر دوسرمفصلی تحت افزایش دمای یکنواخت قرار گیرد. در این حالت ثابت بودن موقعیت تکیه‌گاه‌ها موجب ایجاد نیروی محوری فشاری در تیر می‌گردد. مقدار این نیرو برابر است با $N = E\,\alpha\, A\,\Delta T$ که در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی، A سطح مقطع، E ضریب ارتجاعی و ΔT افزایش دما می‌باشد. با افزایش دما، نیروی محوری مورد نظر نیز افزایش می‌یابد تا مقدار آن به میزان لازم برای کمانش برسد. طبق رابطهٔ اولر برای بار بحرانی تیرها، در چنین تیری دمای لازم برای وقوع کمانش برابر $\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{L^2\, A\, \alpha}$ است که در آن L طول اولیهٔ تیر و I گشتاور دوم سطح می‌باشد.



شکل ۲ کمانش تیر دو سر مفصل تحت اثر بار محوری

با افزایش دما به میزانی بالاتر از دمای بحرانی و به پیروی از آن، افزایش نیروی محوری تا بیش از نیروی بحرانی، شرایط پس‌کمانش ایجاد می‌شود. در این محدوده خیز تیر با دو رویکرد متفاوت تغییرشکل‌های کوچک و بزرگ بررسی می‌شود. طبق نظریهٔ تغییرشکل کوچک در این حالت خیز تیر تحت بار عرضی از معادله زیر که با نام معادلهٔ تیر- ستون [14] شناخته می‌شود، پیروی می‌کند:

$$\mathrm{EI}\frac{d^4w}{dx^4} + \mathrm{N}\frac{d^2w}{dx^2} = \mathrm{q} \qquad (۲۱)$$

که در آن w تغییرمکان تیر در راستای قائم، N بار محوری و F_y بار گسترده است. در حالت پس‌کمانش حرارتی یعنی زمانی که $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$ باشد، در غیاب بار عرضی پاسخ معادلهٔ (۲۱) یعنی منحنی خیز تیر

مانند شکل (۲) به‌صورت تابع سینوسی $w= \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ خواهد بود. در این حالت بـا احتسـاب افـزایش طـول ناشی از انبساط حرارتی، با توجه به الگوی تغییرشـکل تیر، با قرار دادن $w = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ در رابطهٔ محاسبهٔ طول یک منحنی، طول تیر به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

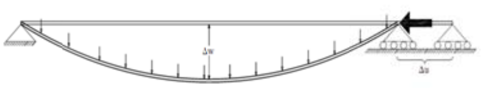
$$s = \int_0^L \sqrt{1 + w'^2}\, dx \qquad (۲۲)$$

$$= \int_0^L \sqrt{1 + \left[\frac{\delta\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2}\, dx \qquad (۲۳)$$

که به‌کمک آن خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{2L}{\pi} \sqrt{\alpha\, \Delta T + \frac{(\alpha\, \Delta T)^2}{2}} \qquad (۲٤)$$

کمیت δ مقدار بیشینهٔ خیز در میانهٔ تیر را مشخص می‌کند. در یک مدل‌سازی مبتنی بـر فـرض تغییرشـکل بـزرگ اسـتفاده از الگـوی سینوسـی بـرای منحنـی پس‌کمانش تیر مصداق نخواهد داشـت. در ایـن مقالـه روشی که در ادامه پیشنهاد شده است برای انجـام ایـن مدل‌سازی به‌کار رفته است.



شکل ۳ جایگزینی اثر افزایش دمای تیر دو سر مفصل توسط تغییرمکان تکیه‌گاه

مطالعه با دیدگاه تغییرشکل بزرگ. فـرض مـی‌کنـیم مطابق شکل (۲) تیری توسط دو تکیـه‌گـاه مفصـلی بـا فاصلهٔ ثابت مهـار شـده باشـد. در اثـر افـزایش دمـای یکنواخت، طول تیر افزایش می‌یابد. در این حالت تیـر خمیده می‌شود و به تکیـه‌گـاه‌هـا نیـرو وارد مـی‌کنـد. تکیه‌گاه‌ها نیز متقابلاً تیر را تحت فشار قرار مـی‌دهنـد. اکنون فرض می‌کنیم در غیاب تغییرات دما، یکـی از دو تکیه‌گاه تیر مانند شکل (۳) یـک تکیـه‌گـاه غلتکـی بـا قابلیت تغییرمکان افقی باشـد. در ایـن صـورت اعمـال یک تغییرمکان افقی موجب فشردگی تیر و ایجـاد آثـار کمانشی مشابه عوارض ناشی از افـزایش دمـا خواهـد بود.

حال اگر مدل ریاضی مورد اسـتفاده امکـان ایجـاد ارتباط میان میزان تغییرمکان تکیه‌گـاه غلتکـی و تغییـر طول تیر را داشته باشد از آن‌جا که رابطـهٔ میـان دمـا و تغییر طول تیر نیـز سـاده و بـه‌صـورت رابطـهٔ زیـر در دست‌رس است می‌توان رابطهٔ میـان دمـا و تغییرمکـان افقی تکیه‌گاهی را به‌دست آورد.

$$\Delta s = L\, \alpha\, \Delta T \qquad (۲۵)$$

در رابطهٔ (۲۵) Δs افزایش طول تیر، L طول اولیه، α ضریب انبسـاط حرارتـی و ΔT افـزایش دمـای تیـر است. در صورت در اختیار داشـتن منحنـی تغییرشـکل تیر، یافتن میزان افزایش طول تیر بـا اسـتفاده از رابطـهٔ (۲۲) میسر است. با داشتن مقـدار Δs و بـا اسـتفاده از معادلهٔ (۲۵) می‌توان دمای معادل را یافت. مدل ریاضی معرفی شده در روابط (٤-۲) و روش اختلاف تربیعـی معرفی شده در بخش قبل امکان محاسـبهٔ رابطـهٔ میـان تغییرمکان تکیه‌گاه مفصلی (به‌عنوان یک شرط کرانـی)، شکل تیر و به پیروی از آن محاسبهٔ تغییر طـول تیـر را فراهم نموده است. بدین ترتیـب بـا معـادل قـرار دادن تغییر طول ناشی از تغییرمکان مرز با تغییر طـول قرینـهٔ ناشی از افزایش دمـا مـی‌تـوان مفهـوم افـزایش دمـا را جایگزین خیز مفصلی کرد و از روی آن عوارض ناشی از تأثیر دما بر شکل تیر را مطالعه نمود.

تحلیل به‌وسیلهٔ نرم‌افزار ABAQUS

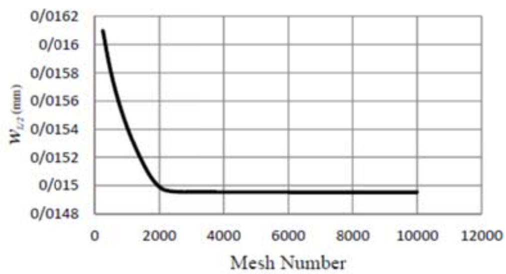
در ایـن مقالـه بـه‌منظـور بررسـی صـحت نتـایج و اعتبارسنجی نتایج مدل تحلیلی ارائه‌شده همزمـان از دو

روش آزمـون تجربـی و مـدل‌سـازی در نـرم‌افـزار ABAQUS استفاده گردیده است. المان مـورد اسـتفاده از نوع المان‌هـای solid اسـت و خـواص حرارتـی آن مطابق جدول (۱) می باشد.

جدول ۱ خواص حرارتی فولاد [16]

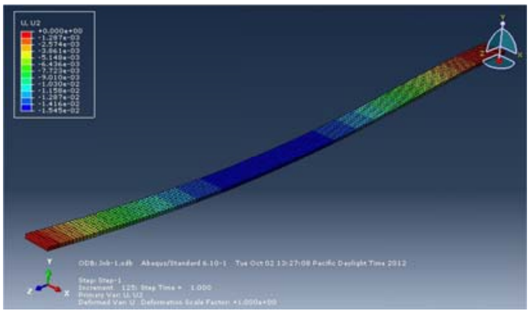
ضریب انبساط طولی $(\frac{1}{°C})$	ظرفیت گرمائی ویژه $(\frac{J}{kg.°K})$	ضریب هدایت $(\frac{W}{m.°K})$
α=۱۱٫۷×۱۰$^{-۶}$	C=٤٤۷	K=۸۰٫۲

در تحلیل حرارتی از تئـوری الاستیسـیتهٔ خطـی و غیرخطـی اسـتفاده شـده اسـت. در ارتبـاط بـا تحلیـل نرم‌افزاری یکی از مسائل با اهمیت، یافتن تعـداد مـش بهینه برای تحلیل دقیق و مناسب می‌باشـد. بـرای ایـن منظور مقدار خیز مـاکزیمم بـه ازای تعـداد مـش‌هـای مختلف محاسبه می‌شود. چنـانچـه بـا افـزایش تعـداد مش‌ها خیز محاسبه شده تغییر نکند تعـداد مـش مـورد اسـتفاده مناسـب خواهـد بـود. در ایـن تحقیـق مقـدار تغییرمکـــان عمـــودی در افـــزایش دمـــای ۱۸۰°C در مش‌بندی‌های مختلف به‌دست آمده و شـکل (٤) رسـم گردیده است.



شکل ٤ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر در مقابل تعداد مش به ازای افزایش دمای ۱۸۰°C

همان‌گونه که از نمودار پیداست مقادیر تغییرمکـان عمودی میانهٔ تیر از ۳۰۰۰ مش به بعد ثابت شده است. بنابراین عدد ۳۰۰۰ تعداد مش بهینه را مشخص می‌کند. در ایـن حالـت مطـابق شـکل (۵) یـک نمونـهٔ توزیـع تغییرمکان در مش‌بندی بهینه ملاحظه می‌شود.



شکل ۵ نمونه تحلیل با مش‌بندی بهینه در نرم‌افزار آباکوس

نتایج

در این قسمت ابتدا به بررسی اعتبـار روش تغییرشـکل بزرگ پرداخته می‌شود. برای این منظور در غیاب تـأثیر حرارت، نتایج حاصل از تحلیل تیر دوسرگیردار تحت بار گسترده به‌روش تغییرشکل بزرگ با نتایج حاصل از روش‌هـایی چـون تحلیـل تغییرشـکل کوچـک و شبیه‌سازی خطی و غیرخطی توسط نرم‌افـزار آبـاکوس مقایسه می‌گردد. در مرحلهٔ بعد، پس از کسب اطمینـان از توانایی شیوه‌های تحلیلی بـه بیـان نتـایج حاصـل از تحلیل تیـر دو سـر مفصـل تحـت بارگـذاری ترکیبـی حرارتی- مکانیکی بـا اسـتفاده از روش‌هـای متفـاوت پرداخته خواهد شد. بدین منظور یک تیر دوسـرگیردار تحت بار گستردهٔ عرضـی q در نظـر گرفتـه مـی‌شـود. تغییرمکان عمودی w در نقاط مختلف تیر با خواصی به شـرح جـدول (۲) بـرای بارهـای N q=۱۰۰ و N q=۱۰۰۰۰ بـا روش‌هـای متفـاوت انـدازه‌گیـری و بـا یکدیگر مقایسه می‌شود.

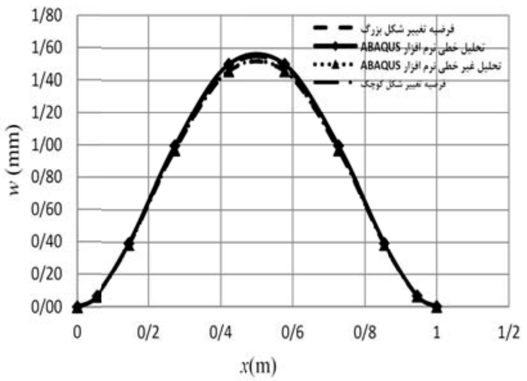
جدول ۲ خواص فیزیکی و مکانیکی تیر دوسر گیردار

گشتاور اینرسی (m^4)	سطح مقطع (m^2)	طول (m)	مدول الاستیسیته (Pa)	ضریب پواسون	بار گسترده (N/m)
۱۰$^{-۱۰}$	۱۰$^{-۴}$	۱	۲۰۰×۱۰^{۹}	۰٫۳	۱۰۰ و ۱۰۰۰۰

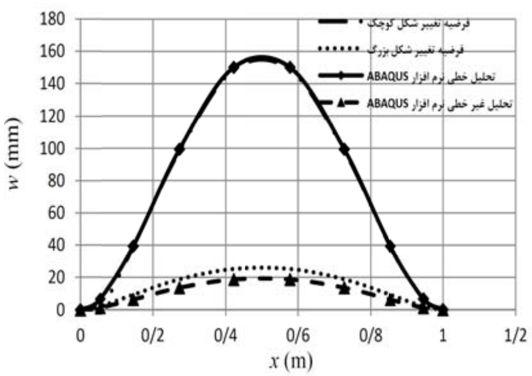
در شکل (٦) مقادیر تغییرمکان عمودی تیـر w، در نقـاط مختلـف آن در تئـوری‌هـای تغییرشـکل بـزرگ، تغییرشکل کوچک، تحلیل خطی و غیرخطی نـرم‌افـزار آبـاکوس در بـار q= ١٠٠ N ارائـه گردیـده اسـت. همان‌گونه که از نمودار مشخص است، به‌دلیل کوچـک بودن مقدار بـار جـانبی، تغییرمکـان حاصـل از تمـامی روش‌ها بسیار نزدیک به یکدیگر می‌باشد.

در شکل(٧) مقادیر تغییرمکان عمودی تیر در بـار q= ١٠kN در نقاط مختلـف و براسـاس تئـوری‌هـای متفاوت مقایسه گردیده است. همـان‌گونـه کـه از ایـن نمــودار پیداســت تغییرمکــان عمــودی در دو روش تغییرشکل کوچک و تحلیل خطـی نـرم‌افـزار آبـاکوس دارای مقادیری شش مرتبه بزرگ‌تـر از دو روش دیگـر است. لازم به تأکید است که بـه‌طـور معمـول بـه‌دلیـل اعمال قیود تحلیلی کمتـر، تغییرمکـان‌هـای حاصـل از روش تغییر مکـان کوچـک، بیشـتر از تغییرمکـان‌هـای حاصل از روش تغییرمکان بزرگ هستند. ایـن مقایسـه حاکی از آن اسـت کـه هـر چنـد در بارهـای کوچـک اختلاف چندانی میـان روش‌هـای مـورد نظـر مشـاهده نمی‌شود، اما با افزایش میزان بار، اختلاف در جواب‌هـا افزایش می‌یابـد. از آن‌جـا کـه دقـت نتـایج حاصـل از روش‌های غیرخطی بیشتر است، ایـن اخـتلاف شـدید نشـان‌دهنـدۀ عـدم پاسـخ‌گـویی روش‌هـای خطـی در تغییرشکل‌های بزرگ می‌باشد.

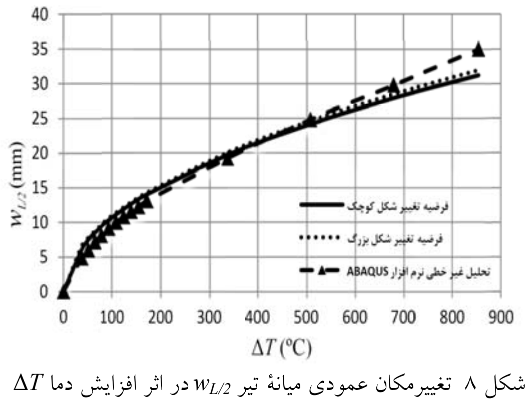
اکنون با به‌کارگیری روش‌هایی چون تحلیل تیرهـا بر پایهٔ نظریهٔ تغییرشکل کوچـک و نظریـهٔ تغییرشـکل بزرگ، شبیه‌سازی خطی و غیرخطی در محیط نرم‌افـزار آباکوس و روش تجربـی، نتـایج حاصـل از بارگـذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی روی تیر دو سر مفصلی بـا مشخصـات فیزیکـی و مکـانیکی مطـابق جـدول (١) بررسی خواهد شد. نتایج به‌صورت مقـادیر تغییرمکـان عمودی وسط تیر $w_{L/2}$، در برابر افزایش دمـا ΔT ارائـه شده است.



شکل ٦ تغییرمکان عمودی (w) در نقاط مختلف طول تیر(x)، به‌ازای q=١٠٠N



شکل ٧ تغییرمکان عمودی(w) در نقاط مختلف طول تیر(x)، به‌ازای q=١٠kN



شکل ٨ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

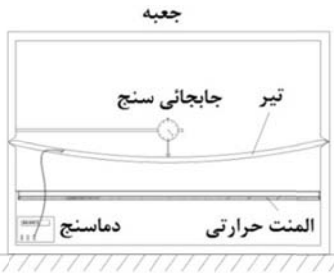
در شکل(٨) تغییرمکان عمودی میانـهٔ تیـر در اثـر افزایش دمای یکنواخت یک تیر دوسرمفصل، حاصل از سـه روش تغییرشـکل کوچـک، تغییرشـکل بـزرگ و

تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس ارائه شده است. همان‌گونه که از نمودار پیداست مقادیر تغییرمکان و روند تغییرات در سه روش بسیار نزدیک به هم می‌باشند.

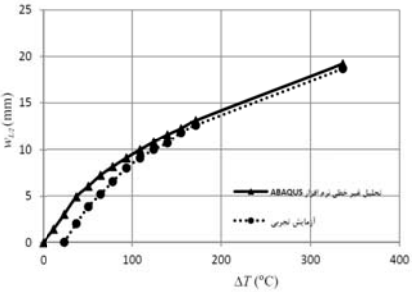
به موازات اتخاذ رویکردهای متفاوت تحلیلی برای مدل‌سازی و محاسبهٔ خیز جانبی پس‌کمانشی، برای اعتباربخشی به نتایج، تأثیر دما بر خیز جانبی به‌صورت تجربی نیز مطالعه شده است. اکنون روند تجربی آزمون کمانش حرارتی تیر–ستون مورد بررسی معرفی شده و نتایج حاصل از آن با تحلیل‌های نظری مقایسه می‌گردد.

در مدل تجربی، تیری با مشخصات فیزیکی معرفی شده در جدول (۱) در یک قاب چوبی با ضریب انبساط حرارتی $۴٫۴\,\mu/^{\circ}C$ که مقدار آن در برابر ضریب انبساط حرارتی فولاد $۱۱٫۷\,\mu/^{\circ}C$ کوچک است، قرار داده می‌شود. گرمایش تیر توسط المنت‌های حرارتی که در فاصله‌ای مناسب از تیر قرار گرفته است تأمین می‌گردد. به‌علت ضخامت کم تیر می‌توان فرض کرد که دمای تیر به‌طور یکنواخت در همه جوانب آن توزیع شده است. برای اندازه‌گیری دمای تیر از یک دماسنج دیجیتال استفاده شده است. کمیت مورد بررسی در این آزمایش تغییرمکان عمودی در وسط تیر است که برای اندازه‌گیری آن از ساعت اندازه‌گیری استفاده شده است. نمودار تجهیزات به‌کار رفته در آزمایش را می‌توان در شکل (۹) مشاهده کرد.

نکتهٔ مورد اهمیت در آزمایش این است که دمای قاب چوبی نیز به‌همراه دمای تیر بالا می‌رود. حال اگر این عامل در تحلیل نتایج در نظر گرفته نشود موجب خطا می‌گردد. لذا لازم است میزان تغییر دمای قاب در فرمول‌بندی وارد شود. برای این منظور با احتساب اثر دما در انبساط قاب چوبی، یک دمای معادل برای تیر فلزی به‌صورت $\Delta T_{eq}=\left(1-\frac{\alpha_w}{2\alpha_s}\right)\Delta T_s$ به‌دست می‌آید.

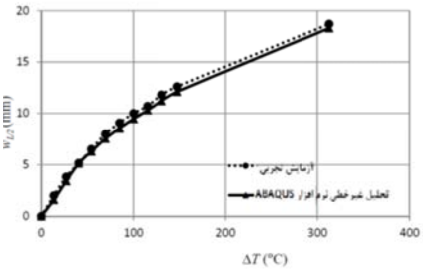


شکل ۹ مدل تیر دوسرمفصل در آزمایش تجربی



شکل ۱۰ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

نمودار(۱۰) به مقایسهٔ تغییرمکان عمودی میانهٔ تیر دوسرمفصل در دو روش تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس و آزمایش تجربی می‌پردازد. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد ترسیمهٔ مربوط به آزمایش تجربی از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. در واقع شروع کمانش در این روش تقریباً از افزایش دمای معادل $۲٤^{\circ}C$ می‌باشد. دلیل این رخداد به اختلاف میان شرایط واقعی و نظری باز می‌گردد. در شرایط واقعی اتصال مفصلی دارای مقدار قابل‌ملاحظه‌ای لقی یا عدم انطباق است. در شروع آزمایش با افزایش دمای نمونه و همراه با آن افزایش طول تیر، تا زمان درگیرشدن تیر داخل قاب، امکان ایجاد نیروی داخلی در تیر، کمانش و بروز شرایط پس‌کمانش وجود ندارد. از این‌رو منحنی دما– تغییرمکان در شکل (۱۲) با تأخیر شروع شده است. برای مقایسهٔ بهتر نتایج با وجودی که در تحلیل، اثر انبساط حرارتی قاب نیز لحاظ شده بود، لازم بود نمودار آزمایش تجربی به میزان $۲٤^{\circ}C$ به سمت چپ انتقال داده شود تا هر دو منحنی از یک مبدأ آغاز شده باشند. تنها در این صورت مقایسهٔ نمودارهای تحلیلی و تجربی می‌توانست مفید و معنادار باشد.



شکل ۱۱ تغییرمکان عمودی میانه تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

در شکل (۱۱) هـر دو نمـودار از مبـدأ مختصـات مـی‌گـذرد. در ایـن حالـت ملاحظـه مـی‌شـود مقـادیر تغییرمکان مربوط به روش آزمـایش تجربـی بـا نتـایج حاصل از روش تحلیـل غیرخطـی نـرم‌افـزار آبـاکوس دارای هم‌خوانی می‌باشد. اختلاف اندک بین دو نمودار که در حـد متعـارف آزمـون‌هـای مکـانیکی اسـت بـه انحراف شرایط هندسی و مادی نمونهٔ آزمون از شرایط فرضی مـورد اسـتفاده در تحلیـل غیرخطـی نـرم‌افـزار آباکوس وابسته است. در دو شکل (۱۱ و ۱۰) مقایسـهٔ نتایج تا افـزایش دمـای حـدوداً ۳۳۰°C انجـام گرفتـه است. علت این امر وجود محدودیت در افزایش دمـای تجهیزات مورد اسـتفاده بـوده اسـت. در واقـع در ایـن روش به‌علت چوبی بودن قاب نگه‌دارنده، افزایش دمـا دارای محدودیت بوده است.

براساس نتایج حاصل از تحلیل‌های نظری و عملی ملاحظه می‌شود در تمام موارد نمودار خیـز جـانبی در مقابل دما دارای پیوستگی می‌باشـد. درحقیقـت هنگـام کمانش طبق مدل نظری بایستی در دمای بحرانـی یـک پرش ناگهانی در خیز جانبی روی دهد. اما به‌طوری‌کـه در شـکل (۸) ملاحظـه مـی‌شـود خیـز جـانبی طبـق مدل‌های تغییرشکل کوچک، تغییرشکل بزرگ و تحلیل نرم‌افزاری، مشابه نتایج تجربی یک رابطهٔ پیوسته با دمـا را از خود نشان می‌دهد. این رفتار بـا واقعیـت رویـداد پدیدهٔ کمانش هماهنگی دارد. درحقیقت هم‌چنان‌که در مراجعی ماننـد [16] نشـان داده شـده، هنگـام کمـانش به‌دلیل حضور خفیف عواملی از قبیـل ناصـافی سـتون، خارج از مرکزیت بار محوری یا وجود بار جانبی (مثلاً وزن تیر-ستون در شکل ۳)، کمانش به‌صورت ناگهانی روی نمی‌دهد بلکه به شکل یک رویـداد تـدریجی (بـا افزایش بار یا دما) ظـاهر مـی‌شـود. بـه‌طـور مشـابه در تحلیل عددی این اختلاف با شـرایط ایـده‌آل از طریـق خطاهای عددی پاسخ را به شـرایط واقعـی نزدیـک‌تـر می‌نماید. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود عوامل خطـا در تحلیل محاسباتی و شیوهٔ کاربرد نظریه‌های تغییرشـکل کوچک و بزرگ برای تحلیل کمانش حرارتـی، همگـی در جهتی تأثیر می‌نمایند که مشابه روند واقعی، کمانش به‌صورت رویدادی تدریجی و پایدار ظاهر می‌شود. در حقیقت به‌دلیل بـزرگ بـودن کـرنش‌هـای حرارتـی در فلزات، برای هندسهٔ مورد تحلیل دمای کمـانش کـه از رابطهٔ $\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{L^2 A \alpha}$ حاصل می‌شود مقدار اندکی و برابـر ۳/۳۷ °C به‌دست می‌آید. این نکته معـرف آنسـت کـه شکل‌های (۱۱ و ۸) بـه‌طـور عمـده رونـد تغییـر خیـز جانبی پس از کمانش را نشان می‌دهد. به عبارت دیگـر اگر کمـانش نـوعی ناپایـداری تلقـی شـود بایسـتی در خیزهای متناظر با دمای کمتر از این مقدار خیز جـانبی هم‌چنان صفر در نظر گرفته شود. از سوی دیگر مقادیر عددی خیز در شکل‌های (۱۱ و ۸) حـاکی از آن اسـت که با وجود عبور دما از حد کمانش، خیـز ایجـاد شـده مقدار اندکی است که قابل مقایسه با ۵۰۰ میلی‌متر طول تیر نیست. به عبارت دیگر خیز جانبی به انـدازه‌ای کـه بتوان کاربرد نظریهٔ تغییرشکل بزرگ را موجه دانسـت، بزرگ نیست. ایـن ویژگـی نزدیکـی نتـایج حاصـل از تحلیل بر پایهٔ نظریه‌هـای کوچـک و بـزرگ را توجیـه می‌نماید. در بخش بعد بر مبنای نتایج معرفـی شـده در این قسمت در مورد رویکرد مناسب تحلیـل اظهـارنظر می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقالـه دو موضـوع اصـلی مـورد بررسـی قـرار

گرفت. در ابتدا بـه بیـان تئـوری تغییرشـکل بـزرگ و اعتبارسـنجی ایـن نظریـه در تحلیـل تیرهـای تحـت بارگذاری مکـانیکی پرداختـه شـد. اعتبارسـنجی روش بسط داده شده برمبنای نظریهٔ تغییرشکل بزرگ از طریق مقایسهٔ نتایج کاربرد آن در تحلیـل تیـر دوسـر گیـردار تحت بار گستردهٔ عرضی با نتایج حاصل از روش‌هـایی چون تغییرشکل کوچک و تحلیـل خطـی و غیرخطـی نرم‌افزار آباکوس انجام گرفت. همان‌گونه کـه مشـاهده گردید نزدیکی نتایج حاصل میان رویکردهای مختلـف نشـان‌دهنـدهٔ معتبـر بـودن روش تغییرشـکل بـزرگ و حصول دقتی نزدیـک بـه تحلیـل غیرخطـی نـرم‌افـزار آباکوس بوده است. قابل‌توجه است که تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس مبتنـی بـر دیـدگاه تغییرشـکل بـزرگ الاستیسیته می‌باشد که در میان تئـوری‌هـای تحلیلـی از دقـت بیشـتری برخـوردار اسـت. مرحلـه اول یعنـی اعتبارسنجی تئوری تغییرشکل بزرگ تیر در بارگـذاری مکانیکی مقدمه‌ای بود برای مرحلهٔ اصـلی کـه بررسـی اعتبار روش تغییرشکل بزرگ در تحلیـل پـس‌کمـانش حرارتی تیرها می‌باشد. بدین منظور تیری با دو تکیه‌گاه مفصلی ثابت، تحت بار گستردهٔ عرضی و افزایش دمای یکنواخت مورد تحلیل قرار گرفت. روش‌های بررسـی شامل روش تغییرشکل کوچک، روش تحلیل خطـی و غیرخطی نرم‌افـزار آبـاکوس و روش آزمـایش تجربـی بـوده اسـت. نتـایج حاصـل از روش‌هـای مختلـف بـا یکدیگر مقایسه گردید تا اعتبار روش تغییرشکل بزرگ در تحلیل‌های حرارتی نیز معلوم گـردد. مقایسـهٔ نتـایج نشـان داد کـه روش‌هـای تغییرشـکل بـزرگ، تحلیـل غیرخطـی آبـاکوس و تغییرشـکل کوچـک در تحلیـل کمانش حرارتی دارای دقت مشابه با یکدیگر می‌باشند. ملاحظه می‌شود بـرای محاسـبهٔ خیـز کمـانش در یـک محـدودهٔ گسـترده از تغییـرات دمـا، اگرچـه روش تغییرشکل کوچک بسیار ساده‌تر و کوتاه‌تر از دو روش تغییرشکل بزرگ و تحلیل غیرخطی نرم‌افـزار آبـاکوس می‌باشد ولی دقتی مشابه با این دو روش دارد. در واقع ریشهٔ این رفتار به مقدار تغییرشـکل‌هـای حرارتـی بـاز می‌گردد. به‌طوری‌که از نمودارهـای (۱۱ و ۸) ملاحظـه می‌شود حتی در بیشترین دماها میـزان خیـز تنهـا کسـر ناچیزی از طول تیر بـوده اسـت. بـه عبـارت دیگـر بـا فرض ثابت ماندن فاصله و نوع تکیـه‌گـاه‌هـا، کمـانش حرارتـی بـه‌طـور ذاتـی موجـب تغییرشـکل کوچـک می‌شود. بدین سـبب جـای تعجـب نخواهـد بـود کـه مدل‌های تغییرشکل بـزرگ و کوچـک هـم‌سـان رفتـار نموده‌اند.

فهرست علائم

سطح مقطع	A
گرمای ویژه	C
مدول الاستیسیته	E
گشتاور اینرسی	I
ضریب رسانش حرارتی	K
طول اولیه تیر	L
گشتاور خمشی	M
بار محوری	N
بار بحرانی کمانش	N_{cr}
بار گسترده	q
نیروی برشی	Q
نسبت کشیدگی محوری	R
طول نهایی تیر	s
دما	T
دمای اولیه	T_0
دمای بحرانی کمانش	T_{cr}
دمای معادل	T_{eq}
دمای معادل تیر	T_s
تغییرمکان افقی	u
تغییرمکان عمودی	w
تغییرمکان عمودی وسط تیر	$w_{L/2}$
فاصله از ابتدای تیر در حالت اولیه	X
فاصله از ابتدای تیر در حالت تغییرشکل یافتهx	$\bar{X}$
ضریب انبساط حرارتی	α
ضریب انبساط حرارتی فولاد	α_s
ضریب انبساط حرارتی چوب	α_w
تغییرمکان عمودی وسط تیر	δ

عملگر تفاضلی	Δ
ضریب سطح مقطع بی‌بعد	η
زاویهٔ بردار عمود بر سطح مقطع تیر و محور عمود پس از تغییرشکل	θ
زاویه بردار عمود بر سطح مقطع تیر و محور عمود پیش از تغییرشکل	θ_0
انحنای تیر	κ
ضریب پواسون	ν
تنش	σ

مراجع

1. Raju, K.K. and Rao, G.V., "Thermal post-buckling of thin simply supported orthotropic square plate", *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 149-154, (1989).
2. Raju, K.K. and Rao, G.V., "Finite element analysis of thermal post-buckling of tapered columns", *Computers and Structures*, Vol. 19(4), pp. 617-620, (1984).
3. Gauss, R.C. and Antman, S.S., "Large thermal buckling of non-uniform beam and plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20(11), pp. 979–1000, (1984).
4. Li, S.R., Cheng, C.J. and Zhou, Y.H., "Thermal post-buckling of an elastic beam subjected to a transversely non-uniform temperature rising", *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, Vol. 24(5), pp. 514-520, (2003).
5. Kocatürk, T. and Akbas, S.D., "Post-buckling analysis of a simply supported beam under uniform thermal loading", *Scientific Research and Essays*, Vol. 6(4), pp. 1135-1142, (2011).
6. Vaz, M.A., Cyrino, J.C.R. and Neves, A.C., "Initial thermo-mechanical post-buckling of beams with temperature-dependent physical properties", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45(3), pp. 256–262, (2010).
7. Hodges, D.H., "Proper definition of curvature in nonlinear beam kinematics", *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1825-1827, (1984).
8. Hinnant, H.E. and Hodges, D.H., "Nonlinear analysis of a cantilever beam", *AIAA Journal*, Vol. 26, pp. 1421-1727, (1988).
9. Monasa, F. and Lewis G. "Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials", *International Journal of Computers and Structures*, Vol. 14(5), pp. 357-360, (1981).
10. Wang, C.Y., "Large deflection of an inclined cantilever with an end load", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 16(2), pp. 155-164, (1981).
11. Lewis, G. and Monasa, F., "Large deflection of cantilever beam of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment", *Journal of Non-Linear Mechanics*, 17(1), pp. 1-6, (1982).
12. Byoung, K.L., Wilson, J.F. and Oh, S.J., "Elastica of cantilevered beams with variable cross sections", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 28(5), pp. 579-589, (1993).
13. Baker, G., "On the large deflection of non-prismatic cantilevers with a finite depth", *Computers and Structures*, Vol. 46(2), pp. 365-370, (1993).
14. Saha, G. and Banu, S., "Buckling load of a beam-column for different end conditions using multi-segment integration technique", *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 2, pp. 27-33, (2007).
15. Hu, Y.J., Yang, J. and Kitipornchai, S., "Pull-in analysis of electrostatically actuated curved micro-beams with large deformation", *Smart Material and Structures*, Vol. 19, pp. 1- 9, (2010).
16. Beer, F.P., Johnston, E.R. and DeWolf, J.T., "*Strength of Materials, 3rd Edition*", McGraw Hill, USA, (2002).